

Öğrencinin

Fak. No :

Adı ve Soyadı :

1	2	3	4	5	TOP.

1) Aşağıdaki kavramları tanımlayınız

a) $\text{Hom}(V, W)$

b) Ayrık dairesel permütasyon

c) Alternatif Lineer dönüşüm

d) Direkt toplam uzayı

2) K birimi 1 olan değişimli bir halka, $f: M \times M \rightarrow K$, $M = K^2$ olmak üzere $\vec{\alpha}_1 = (1, -1)$, $\vec{\alpha}_2 = (3, -5) \in M$ için $f(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = ?$

3) Dairesel iki permütasyonun çarpımının dairesel olup olmadığını bir örnekle gösteriniz.

4) $W_1 = \text{Sp}\{(1, 2, -1), (3, 0, 1)\}$ ve $W_2 = \text{Sp}\{(-1, 1, 0), (2, 1, 3)\}$
 $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ uzayının sıfırdan farklı bir vektörünü bulunuz.

5) $L: V \rightarrow W$ lineer dönüşümünün adjointi (ek) $L^*: W^* \rightarrow V^*$ ise L^* da lineerdir. Gösteriniz.

Not: Her soru eşit puanlı
 olup süre 75 dk. dir.

Başarılar

Prof. Dr. Vedat ASIL

Final Soruları Cevap Anahtarı

1) Aşağıdaki kavramları tanımlayınız.

$\text{Hom}(V, W)$: V den W 'ye olan bütün lineer dönüşümlerin uzayına denir.

Ayrık dairesel permütasyon : M 'nin farklı iki dairesel permütasyonunun dairesel notasyonlarda M 'nin aynı bir elemanı yer almıyorsa bu iki dairesel permütasyona ayrıktır denir.

Alterne lineer dönüşüm : M üzerindeki r -lineer dönüşümü için herhangi iki $\vec{\alpha}_i$ elemanı eşit olduğunda

$$f(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_r) = 0$$

ise f 'ye alterne denir.

Direk Toplam Uzayı : V bir vektör uzayı olsun.

Eğer $V = W_1 + W_2$ ve $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ ise V uzayına W_1 ve W_2 alt uzaylarının direk toplamı denir ve $V = W_1 \oplus W_2$ şeklinde gösterilir.

2) K birimi 1 olan değişimli bir halka, $f: M \times M \rightarrow K$,
 $M = K^2$ olmak üzere $\vec{\alpha}_1 = (1, -1)$, $\vec{\alpha}_2 = (3, -5) \in M$ için

$$f(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = ?$$

$$f(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = \sum_{\sigma \in S_2} s(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2}$$

$\sigma \in S_2$ permütasyonları

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow s(\sigma_1) = +1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2) \rightarrow s(\sigma_2) = -1$$

$$f(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = s(\sigma_1) a_{\sigma_1(1)1} a_{\sigma_1(2)2} + s(\sigma_2) a_{\sigma_2(1)1} a_{\sigma_2(2)2}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\vec{\alpha}_1 = (1, -1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = (3, -5) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = 3, \quad a_{22} = -5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow f(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = 1(-5) - 3(-1) = (-5) + 3 = -2$$

3) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cümlesinin S_6 grubunda iki

dairesel permütasyon $\sigma = (1, 4, 5, 6)$, $\tau = (2, 1, 5)$

olsun. O zaman

$$\sigma \tau = (1, 4, 5, 6)(2, 1, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

bunlardan hiç birisi dairesel permütasyon değildir.

$$4) \quad W_1 = \text{sp} \{ (1, 2, -1), (3, 0, 1) \} \quad \vee \quad W_2 = \text{sp} \{ (-1, 1, 0), (2, 1, 3) \}$$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2$ uzayının sıfırdan farklı bir vektörünü bulunuy.

$$\forall \vec{x} \in W_1 \quad \text{için} \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \ni \quad \vec{x} = (x_1 + 3x_2, 2x_1, -x_1 + x_2)$$

$$\forall \vec{x} \in W_2 \quad \text{için} \quad \exists y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad \ni \quad \vec{x} = (-y_1 + 2y_2, y_1 + y_2, 3y_2)$$

$$\Rightarrow \forall \vec{x} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow (x_1 + 3x_2, 2x_1, -x_1 + x_2) = (-y_1 + 2y_2, y_1 + y_2, 3y_2)$$

$$\Rightarrow x_1 + 3x_2 = -y_1 + 2y_2$$

$$2x_1 = y_1 + y_2$$

$$-x_1 + x_2 = 3y_2$$

Bu denklemlerde özel olarak $y_1 = 1$ alalım.

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2y_2 &= -1 \\ 2x_1 - y_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &3\text{- bilinmeyenli} \\ &\text{lin. denklemini çözümü} \\ &x_1 = 1/3 \\ &x_2 = -2/3 \\ &y_2 = -1/3 \end{aligned}$$

o halde

$$\vec{x} = \left(-1 - \frac{2}{3}, 1 - \frac{1}{3}, -1 \right)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1 \right) \in W_1 \cap W_2.$$

Böyle bir vektörün tek olmadığı aşıktır. (Seçimden)

5) $L: V \longrightarrow W$ lin. dönüşümünün eki:
 $L^*: W^* \longrightarrow V^*$ ise L^* da lineerdir.

— . —
 $a, b \in \mathbb{F}$ ve $\alpha^*, \beta^* \in W^*$ olmak üzere

$$L^*(a\alpha^* + b\beta^*) \stackrel{?}{=} aL^*(\alpha^*) + bL^*(\beta^*)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\forall \vec{\alpha} \in V$ için

$$L^*(a\alpha^* + b\beta^*)(\vec{\alpha}) = (a\alpha^* + b\beta^*)(L(\vec{\alpha}))$$

olduğunu biliyoruz. α^*, β^* lin. olduklarından

$$\begin{aligned} &= a\alpha^*(L(\vec{\alpha})) + b\beta^*(L(\vec{\alpha})) \\ &= a[L^*(\alpha^*)](\vec{\alpha}) + b[L^*(\beta^*)](\vec{\alpha}) \\ &= [aL^*(\alpha^*) + bL^*(\beta^*)](\vec{\alpha}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ olur ki L^* da lineerdir.